Dérivabilité

M1 – Chapitre 3

I. Dérivée en un point

$$\boxed{f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \exists\, f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$$\boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \mathcal{E}(x)} \quad \left(\lim_{x \to a} \mathcal{E}(x) = 0\right)$$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x - a)}_{\text{tangente en a}} + \mathcal{E}(x)(x - a)$$

$$f \text{ dérivable} \Rightarrow f \text{ continue}$$

II. Dérivées successives

$$f \in \mathcal{C}^n \Leftrightarrow f \text{ dérivable } n \text{ fois et } f^{(n)} \text{ continue}$$

III. Formule de Leibnitz

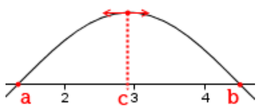
$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}}$$

IV. Extremum local

$$\boxed{f'(a) = 0 \Leftrightarrow f \text{ admet un extremum local en } a}$$

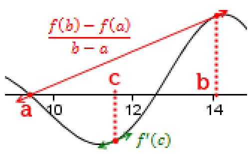
V. Théorème de Rolle

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a\,;b] \quad f \text{ dérivable sur }]a\,;b[\\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a\,;b[\ t.q.\, f'(c) = 0 \end{array}}$$



VI. Théorème des accroissements finis

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a\,;b] \quad f \text{ dérivable sur }]a\,;b[\\ \exists\, c \in]a\,;b[\ t.q.\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array}}$$



VII. Inégalité des accroissements finis

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathcal{C}^1 \\ f' \text{bornée sur } [a\,;b] \\ M = \max|f'(x)| \end{array}\right\} \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

VIII. Formules de dérivation

$f(x)$	$f'(x)$
$(g \circ f)(a)$	$f'(a)g'\big(f(a)\big)$
f^{-1}	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
u^n	$u'nu^{n-1}$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
a^x	$\ln(a)\, a^x$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$